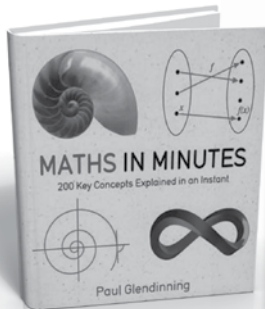




ریاضیات

در چند دقیقه



دستگاه‌های عددی

«دستگاه عددی» طریقی برای نوشتن اعداد است. برای مثال، در دستگاه دهدهی روزمره‌مان، اعداد را مثلاً به صورت $434/15$ نمایش می‌دهیم. ارقام واقع در این عدد، یکان، دهگان، صدگان، یک دهم‌ها، یک صدم‌ها، یک هزارم‌ها، و غیره را مشخص می‌کنند، و به «ضرایب» (coefficients) موسوم‌اند.

بنابراین:

$$434/15 = (4 \times 100) + (3 \times 10) + (4 \times 1) + \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{5}{100}\right)$$

این نمایش صرفاً توصیف اختصاری مجموعی از توان‌های ده است، و هر عدد حقیقی می‌تواند به این طریق نوشته شود.

اما مزیت خاصی در مورد دستگاه در «پایه یا مبنای ده» موجود نیست. یک عدد می‌تواند در مبنای هر عدد صحیح مثبت n ، با استفاده از ضرایبی نوشته شود که از 0 تا $n-1$ تغییر می‌کنند. برای مثال، عدد $8\frac{5}{18}$ در مبنای دو یا دودویی می‌تواند به صورت $100/0101$ نوشته شود. ضرایب سمت چپ ممیز نشانگر یک‌ها، دوها، چهارها و هشت‌ها، یعنی توان‌های 2 ‌اند. موارد سمت راست نیم‌ها، ربع‌ها، یک هشتم‌ها و یک شانزدهم‌ها را نشان می‌دهند. اغلب رایانه‌ها از دستگاه دودویی استفاده می‌کنند، زیرا برای کار در این دستگاه الکترونیکی، دو ضریب (0 و 1) آسان‌ترند.

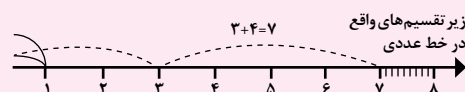
دهدهی	دودویی
0	0
1	1
2	10
3	11
10	1010
11	1011
12	1100

خط عددی

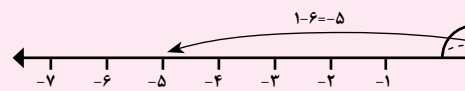
خط عددی مفهومی سودمند برای اندیشیدن در مورد معنی عملیات ریاضی است. خط مزبور خطی افقی با تقسیمات خاصی است که با اعداد درست مثبت و منفی در هر جهت آن از یکدیگر، به درازا کشیده می‌شوند. کل «اعداد درست» (whole numbers) که توسط خط عددی پوشش داده شده‌اند، به‌عنوان اعداد صحیح شناخته می‌شوند.

جمع یک عدد مثبت، متناظر با حرکت به سمت راست خط عددی، به اندازه فاصله‌ای هم‌ارز با عدد مثبت مفروضمان است. تفریق یک عدد مثبت، متناظر با حرکت به سمت چپ، به اندازه فاصله مثبت داده شده است.

به این ترتیب، یک منهای ده به معنی ۱۰ واحد حرکت کردن به سمت چپ یک است که منهای نه را می‌دهد و ۹- نوشته می‌شود.



بین اعداد صحیح نشان داده شده در شکل، اعداد دیگری، از قبیل نیم‌ها، یک‌سوم‌ها و یک‌چهارم‌ها وجود دارند. این اعداد نسبت‌های ساخته شده با تقسیم هر عدد صحیح بر یک عدد صحیح ناصفر هستند. این‌ها همراه با اعداد طبیعی - صفر و اعداد صحیح مثبت که در واقع نسبت‌های تقسیم شده بر ۱ اند - «اعداد گویا» (rational numbers) را تشکیل می‌دهند. این‌ها با زیرتقسیم‌های ریز‌تر و ریز‌تر خط عددی مشخص می‌شوند. ولی آیا اعداد گویا خط عددی مان را کامل می‌کنند؟ آشکار می‌شود که تقریباً جمیع عددهای بین صفر و یک نمی‌توانند به صورت نسبت‌ها نوشته شوند؛ این اعداد به نام «اعداد گنگ» (irrational numbers) معروف‌اند؛ یعنی اعدادی که نمایش دهمی‌شان هیچ‌گاه متوقف نمی‌شود و سرانجام تکرار شونده نیستند. مجموعه کامل اعداد گویا و گنگ با هم به صورت «اعداد حقیقی» (real numbers) شناخته می‌شوند.



خانواده‌های اعداد

اعداد را می‌توان در خانواده‌هایی رده‌بندی کرد که در ویژگی‌های معینی شریک‌اند. به این طریق، راه‌های بسیاری برای قرار دادن اعداد در رده‌بندی‌ها موجودند. در واقع، درست همان‌طور که بی‌نهایت عدد وجود دارد، بی‌نهایت طریق گوناگون موجود است که این اعداد را می‌توان زیر تقسیم و از یکدیگر متمایز کرد. برای مثال، «اعداد طبیعی» (natural numbers) یعنی اعداد صحیحی که اشیاء را در دنیای واقعی با آن‌ها می‌شماریم، تنها یکی از چنین خانواده‌هایی هستند؛ همان‌گونه که «اعداد صحیح» (integers) چنین‌اند، یعنی اعداد درست، از جمله اعداد کمتر از صفر. «اعداد گویا» (rational numbers) خانواده دیگری را تشکیل می‌دهند و به تعریف خانواده‌ای حتی بزرگ‌تر کمک می‌کنند؛ یعنی خانواده اعداد گنگ.

خانواده‌های «اعداد جبری» (algebraic numbers) و «اعداد متعالی» (transcendental numbers) توسط رفتارهای دیگری تعریف شده‌اند، در حالی که اعضای جمیع این خانواده‌های مختلف «اعداد حقیقی» (real numbers) هستند که در مقابل «اعداد موهومی» (imaginary numbers) تعریف شده‌اند.

گفتن اینکه عددی عضو خانواده معینی است، طریق مختصر توصیف ویژگی‌های گوناگون آن است و اینکه چه نوع پرسش‌های ریاضی می‌توان به طریقی سودمند درباره آن مطرح کرد. غالباً خانواده‌های اعداد از تولید توابعی به‌وجود می‌آیند که چگونگی ساخت دنباله‌ای از اعداد را توصیف می‌کنند. به طریقی دیگر، می‌توانیم یک تابع یا قاعده را برای توصیف خانواده‌هایی تشکیل دهیم که به‌طور شهودی آن‌ها را می‌شناسیم.

به‌عنوان نمونه، ما به‌طور غریزی اعداد زوج را می‌شناسیم، اما آن‌ها چیستند؟ از لحاظ ریاضی می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت جمیع اعداد طبیعی به‌صورت $2 \times n$ که در آن‌ها n عددی طبیعی است، تعریف کنیم. همچنین، اعداد فرد اعدادی طبیعی به‌صورت $2n+1$ اند، در حالی که اعداد اول اعدادی بزرگ‌تر از ۱ اند که تنها مقسوم‌علیه‌های آن‌ها ۱ و خودشان هستند.

خانواده‌های دیگری نیز به‌طور طبیعی در ریاضیات رخ می‌دهند. مثلاً در «اعداد فیبوناتچی» (...، ۳۴، ۲۱، ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱) هر عدد مجموع دو عدد پیشین آن است. این الگو به‌طور طبیعی در زیست‌شناسی و ریاضیات، هر دو رخ می‌دهد. اعداد فیبوناتچی به‌طور تگاتنگی با نسبت طلایی نیز مرتبط‌اند.

مثال‌های دیگر شامل جدول‌های ضرب‌اند که با ضرب عدد صحیح مثبتی در عدد خاص دیگری ساخته می‌شوند، و مربع‌ها که در آن‌ها هر عدد حاصل ضرب یک عدد طبیعی در خودش است؛ یعنی n ضرب در n یا n^2 ، یا مربع n .